TUGAS AKHIR – SM 141501

KAJIAN PROBABILITAS BERNILAI HIMPUNAN DAN HUBUNGANNYA DENGAN UKURAN BERNILAI HIMPUNAN

ASLIKHATUL BAROROH
NRP 1212 100 032

Dosen Pembimbing
Dra. Farida Agustini Widjajati, MS.
Sunarsini, S.Si, M.Si

JURUSAN MATEMATIKA
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

FINAL PROJECT – SM 141501

ON SET VALUED PROBABILITY AND ITS CONNECTIONS WITH SET VALUED MEASURE

ASLIKHATUL BAROROH
NRP 1212 100 032

Supervisors
Dra. Farida Agustini Widjajati, MS.
Sunarsini, S.Si, M.Si

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Faculty of Mathematics and Science
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Surabaya 2016

LEMBAR PENGESAHAN

KAJIAN PROBABILITAS BERNILAI HIMPUNAN DAN HUBUNGANNYA DENGAN UKURAN BERNILAI HIMPUNAN

ON SET VALUED PROBABILITY AND ITS CONNECTION WITH SET VALUED MEASURE

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat
Untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
Pada Bidang Analisis dan Aljabar
Program Studi S-1 Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh :
ASLIKHATUL BAROROH
NRP. 1212 100 032

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II,	Dosen Pembimbing I,
Sunarsini, S.Si. M.Si	Dra. Farida Agustini Widjajati, MS.
NIP. 19691004 199402 2 001	NIP. 19540817 198103 2 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
FMIPA ITS

Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT
NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juli 2016

KEMENTERIAN RISET, TEKNOLOGI INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN JURUSAN MATEMATIKA

KAJIAN PROBABILITAS BERNILAI HIMPUNAN DAN HUBUNGANNYA DENGAN UKURAN BERNILAI HIMPUNAN

Nama : Aslikhatul Baroroh
NRP : 1211 100 032
Jurusan : Matematika
Dosen Pembimbing : 1) Dra. Farida Agustini Widjajati, MS.
2) Sunarsini, S.Si, M.Si

ABSTRAK

Teori probabilitas merupakan teori yang digunakan untuk memodelkan ketidakpastian. Nilai probabilitas suatu kejadian menunjukkan seberapa besar kemungkinan kejadian tersebut akan terjadi dengan selang nilai antara nol sampai dengan satu. Namun, teori probabilitas hanya dapat digunakan untuk kejadian yang memiliki informasi yang lengkap. Untuk kejadian yang memiliki informasi tidak lengkap dapat direpresentasikan dengan *imprecise probability*. Salah satu model dari *imprecise probability* adalah probabilitas bernilai himpunan. Probabilitas bernilai himpunan adalah himpunan tak kosong dengan setiap elemennya merupakan hasil pemetaan selektor probabilitas. Kemudian dikonstruksi suatu ukuran bernilai himpunan yang dibangun oleh probabilitas bernilai himpunan. Melalui pengadaptasian ukuran bernilai himpunan terhadap ukuran probabilitas, dapat konstruksi suatu probabilitas bernilai himpunan. Oleh karena itu, terdapat keterkaitan antara probabilitas bernilai himpunan dengan ukuran bernilai himpunan.

Kata kunci : imprecise probability, probabilitas bernilai himpunan, ukuran bernilai himpunan

ON SET VALUED PROBABILITY AND ITS CONNECTION WITH SET VALUED MEASURE

Name	**: Aslikhatul Baroroh**
NRP	**: 1211 100 032**
Department	**: Mathematics**
Supervisors	**: 1) Dra. Farida Agustini Widjajati, MS.**
	2) Sunarsini, S.Si, M.Si

ABSTRACT

Probability theory is used to model uncertainty. The value of probability of an event show how much the event will be held which the value between zero until one. However, probability theory can only use for an event that has sufficient information. For insufficient information event can represent by imprecise probability. One concept of imprecise probability is set valued probability. Set valued probability is nonempty set which is the result of mapping the probability selector. And then we construct set valued measure by the set valued probability. By the adoption of set valued measure to probability measure, we can construct set valued probability. Therefore, there is connection between set valued probability and set valued measure.

Kata kunci : imprecise probability, set valued probability, set valued measure

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Hal

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
Ω	Himpunan semua kemungkinan hasil percobaan
A, B	Kejadian yang dinginkan
$\emptyset$	Kejadian kosong
A'	Komplemen dari kejadian A
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$	Aljabar-σ
μ	Ukuran
$(\Omega, \mathcal{A})$	Ruang terukur
$P(A)$	Probabilitas kejadian A
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	Ruang sampel
$\boldsymbol{P}$	Probabilitas bernilai himpunan
p	Selektor probabilitas
$S_{\boldsymbol{p}}$	Himpunan semua selektor probabilitas
M	Ukuran bernilai himpunan
$\{A_i\}_{i=1}^{n}$	Partisi berhingga dari A
S_A	Himpunan selektor probabilitas atom
$\boldsymbol{M}$	*Probability adaptive set valued measure*
m	Selektor ukuran
$\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{M}}$	Probabilitas bernilai himpunan yang dibangun oleh $\boldsymbol{M}$

BAB I
PENDAHULUAN

Pada bab ini dijelaskan hal-hal yang melatarbelakangi permasalahan yang dibahas pada Tugas Akhir ini. Kemudian permasalahan tersebut disusun dalam suatu rumusan masalah. Selanjutnya dijabarkan pula batasan masalah untuk mendapatkan tujuan yang diinginkan serta manfaat yang dapat diperoleh. Adapun sistematika penulisan Tugas Akhir ini akan diuraikan dibagian akhir bab ini.

1.1 Latar Belakang

Teori probabilitas merupakan salah satu cabang matematika yang digunakan untuk memodelkan suatu ketidakpastian atau kejadian acak. Teori probabilitas dari ruang sampel berhingga direpresentasikan dalam sebuah bilangan riil yang disebut pembobot atau probabilitas, dengan nilai antara nol sampai dengan satu, yang memungkinkan untuk menghitung nilai probabilitas terjadinya suatu kejadian. Jika suatu kejadian memiliki kemungkinan terjadi yang besar, maka nilai probabilitas dari kejadian tersebut mendekati satu. Di sisi lain, nilai probabilitas yang mendekati nol diberikan apabila suatu kejadian memiliki kemungkinan terjadi sangat kecil atau hampir tidak mungkin terjadi[1]. Dengan mengetahui besar nilai probabilitas dari suatu ketidakpastian, akan sangat membantu dalam pengambilan keputusan.

Teori probabilitas hanya dapat digunakan apabila tersedia informasi yang cukup seperti data/sampel mengenai ketidakpastian tersebut, yang kemudian akan digunakan untuk mengestimasi distribusi probabilitasnya. Akan tetapi, ketidakpastian terkadang memiliki ketidakcukupan informasi yang tersedia sehingga ciri-ciri distribusi prababilitasnya tidak dapat teridentifikasi[2]. Misalnya pada kejadian pengambilan bola sebagai berikut. Akan diambil 4 bola dalam satu kali pengambilan secara acak dari sebuah kotak yang berisi 50 bola yang terdiri dari bola merah dan bola hijau, akan tetapi jumlah dari masing-masing bola merah dan bola hijau tersebut tidak diketahui. Dengan demikian nilai probabilitas terambilnya 4 bola dengan rincian 2 bola merah dan 2 bola hijau tidak dapat ditentukan secara pasti apabila menggunakan teori probabilitas yang sederhana.

Kejadian ketidakpastian pada pengambilan bola di atas dapat direpresentasikan dengan *imprecise probability*. *Imprecise probability* merupakan bentuk umum yang digunakan untuk mengkover semua model matematika, yang berupa ukuran probabilitas tanpa nilai probabilitas numerik yang tepat. Model *imprecise probability* diperlukan dalam masalah penarikan kesimpulan dimana informasi yang relevan tidak mencukupi, samar/tidak pasti atau berlawanan, dan pada masalah pengambilan keputusan dimana pilihan yang tersedia tidak lengkap. *Imprecise probability* terbagi kedalam dua bentuk yaitu bentuk kualitatif (probabilitas perbandingan, *partial preference orderings*, dll) dan bentuk kuantitatif (probabilitas interval, teori *possibility*, fungsi kepercayaan, ramalan teratas dan terbawah, probabilitas teratas dan terbawah, probabilitas fuzzy, dll)[2]. Model *imprecise probability* ini merupakan bukti bahwa teori probabilitas mengalami perkembangan dari waktu ke waktu.

Pada tahun 2012, Mila Stojaković memperkenalkan konsep baru dari model *imprecise probability* yaitu probabilitas bernilai himpunan yang didefinisikan atas ruang terukur dengan hasilnya berupa koleksi dari himpunan bagian interval satuan. Dengan adanya model *imprecise probability* ini permasalahan ketidakpastian seperti contoh pada pengambilan bola di atas dapat terpecahkan sehingga dapat membantu dalam pengambilan kesimpulan. Oleh karena itu, penulis melakukan kajian mengenai salah satu model *imprecise probability* yaitu probabilitas bernilai himpunan serta bagaimana hubungannya dengan ukuran bernilai himpunan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang tersebut, masalah yang dibahas pada Tugas Akhir ini adalah :

1. Bagaimana konsep probabilitas bernilai himpunan?

2. Bagaimana hubungan antara probabilitas bernilai himpunan dengan ukuran bernilai himpunan?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang digunakan dalam Tugas Akhir ini adalah hasil dari probabilitas bernilai himpunan ini dalam bentuk diskrit.

1.4 Tujuan

Tujuan Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Mengkaji konsep probabilitas bernilai himpunan.
2. Mengkaji hubungan antara probabilitas bernilai himpunan dengan ukuran bernilai himpunan.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penulisan Tugas Akhir ini adalah :

1. Sebagai wawasan mengenai penerapan teori ukuran dalam bidang statistika, khususnya teori probabilitas.
2. Sebagai referensi mengenai perkembangan teori probabilitas.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab, yaitu:

1. BAB I PENDAHULUAN
   Bab ini berisi tentang gambaran umum dari penulisan Tugas Akhir yang meliputi latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan.
2. BAB II TINJAUAN PUSTAKA
   Bab ini berisi tentang teori dasar yang mendukung dalam Tugas Akhir ini, antara lain konsep dasar teori probabilitas dan ukuran probabilitas.
3. BAB III METODE PENELITIAN
   Bab ini menjelaskan metode dan tahapan-tahapan yang digunakan dalam penyelesaian Tugas Akhir.

4. BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN
   Bab ini membahas tentang penjabaran probabilitas bernilai himpunan disertai contoh riil kejadian yang dapat diselesaikan dengan probabilitas bernilai himpunan, aturan penjumlahan sifat-sifat probabilitas bernilai himpunan, serta hubungan probabilitas bernilai hubungan dengan ukuran bernilai himpunan.
5. BAB V PENUTUP
   Bab ini berisi kesimpulan Tugas Akhir yang diperoleh dari bab pembahasan serta saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diuraikan mengenai penelitian terdahulu, teori ukuran probabilitas beserta komponen-komponen pada probabilitas seperti ruang sampel dan kejadian. Selain itu, diuraikan pula aturan penjumlahan probabilitas.

2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian yang mendasari penulisan Tugas Akhir ini adalah penelitian mengenai perkembangan teori probabilitas. Secara tradisional, ketidakpastian dimodelkan dengan menggunakan distribusi probabilitas sebagaimana yang telah dikemukakan oleh Kormogolov, Laplace, de Fenetti, Ramsey, Cox, Lindley, dan banyak lainnya. Namun, teori ini tidak dapat langsung diterima oleh para ilmuan. Kemudian para statistikawan dan *probabilists* berpendapat bahwa perlu adanya modifikasi atau perluasan dari teori probabilitas, karena tidak semua probabilitas berlaku untuk sebarang kejadian, terutama pada saat informasi yang tersedia mengenai data tidak mencukupi untuk mengestimasi distribusinya[2].

Salah satu bentuk perluasan teori probabilitas adalah *imprecise probability*. Penelitian pertama mengenai *imprecise probability* dilakukan oleh George Boole pada pertengahan abad ke-19 yang bertujuan untuk mengkombinasikan teori logika dan probabilitas. Pada tahun 1920, Keynes memformulasikan dan menerapkan pendekatan estimasi selang eksplisit untuk probabilitas[5]. *Imprecise probability* terbagi kedalam dua bentuk yaitu bentuk kualitatif (probabilitas perbandingan, order pilihan parsial, dll) dan bentuk kuantitatif (probabilitas interval, teori *possibility*, fungsi kepercayaan, ramalan teratas dan terbawah, probabilitas teratas dan terbawah, probabilitas fuzzy, dll)[2].

Pada tahun 2012, Mila Stojaković memperkenalkan konsep baru dari model *imprecise probability* yaitu probabilitas bernilai himpunan yang didefinisikan atas ruang terukur dengan hasilnya berupa koleksi dari himpunan bagian interval satuan. Dalam papernya, *set valued probability and its connection with set valued mesure*, Stojaković menyatakan bahwa probabilitas bernilai himpunan memiliki hubungan yang erat dengan ukuran bernilai himpunan[2]. Pada konsep ini, nilai probabilitas pada akhirnya direpresentasikan dalam bentuk himpunan yang tersusun dari perluasan teori probabilitas sederhana yang biasa dipakai, sehingga mendorong penulis untuk mengkaji lebih lanjut mengenai konsep dari probabilitas bernilai himpunan ini.

2.2 Ruang Sampel dan Kejadian

Dalam statistika digunakan istilah percobaan bagi sebarang proses pengolahan data. Salah satu contoh percobaan berupa pelemparan sekeping mata uang logam. Pada percobaan tersebut hanya ada dua kemungkinan hasil, yaitu sisi gambar dan sisi angka. Himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan disebut ruang sampel dan biasanya dinotasikan dengan Ω. Setiap kemungkinan hasil dalam suatu ruang sampel disebut titik sampel. Dengan demikian, ruang sampel dari percobaan pelemparan sekeping uang logam tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\Omega = \{G, A\}$$

dengan G menyatakan "sisi gambar" dan A menyatakan "sisi angka"[1].

Dalam suatu percobaan, sering kali diharapkan terjadinya suatu kejadian tertentu. Kejadian yang tidak dapat ditentukan atau tidak diketahui sebelumnya disebut kejadian acak. Misalkan A kejadian munculnya angka yang habis dibagi tiga apabila sebuah dadu dilempar. Ini akan terjadi apabila hasil yang muncul merupakan anggota himpunan $A = \{3,6\}$ yang merupakan himpunan bagian dari ruang sampel $\Omega_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$. Dengan demikian, kejadian merupakan kumpulan titik sampel. Sehingga dapat dikatakan bahwa kejadian merupakan himpunan bagian dari ruang sampel. Sedangkan himpunan bagian ruang sampel yang tidak memiliki satupun anggota disebut kejadian kosong dan dinotasikan dengan $\emptyset$.

2.3 Operasi-Operasi pada Kejadian

Operasi pada kejadian dapat menghasilkan kejadian baru dimana kejadian baru tersebut merupakan himpunan bagian dari ruang sampel semula. Macam-macam operasi kejadian adalah sebagai berikut:

1. Irisan dua kejadian
   Irisan dua kejadian A dan B dinotasikan dengan $A \cap B$, merupakan kejadian yang terjadi sekaligus pada kejadian A dan B. Elemen-elemen pada $A \cap B$ dapat didefinisikan dengan $A \cap B = \{x | x \in A \; dan \; x \in B\}$.
2. Gabungan dua kejadian
   Gabungan dua kejadian A dan B dinotasikan dengan $A \cup B$, merupakan kejadian yang terjadi sekurang-kurangnya satu dari dua kejadian A dan B. Elemen-elemen pada kejadian $A \cup B$ dapat didefinisikan dengan $A \cup B = \{x | x \in A \; atau \; x \in B\}$.
3. Kejadian saling asing
   Dua kejadian A dan B yang tidak mungkin terjadi bersamaan disebut kejadian yang saling asing. Dengan kata lain, kejadian A dan B tidak memiliki elemen yang sama atau $A \cap B = \emptyset$.
4. Komplemen suatu kejadian
   Komplemen suatu kejadian A dinotasikan dengan A', merupakan himpunan semua anggota S yang bukan anggota A. Dengan demikian, elemen-elemen pada kejadian A' didefinisikan dengan $A' = \{x | x \in S \; dan \; x \notin A\}$.

2.4 Permutasi dan Kombinasi

Permutasi merupakan suatu susunan yang dibentuk semua benda oleh keseluruhan atau sebagian dari sekumpulan benda yang memperhatikan urutannya. Banyaknya permutasi pada pengambilan r benda dari n benda dirumuskan sebagai

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{2.1}$$

Sedangkan kombinasi merupakan banyaknya cara mengambil r benda dari n benda tanpa memperhatikan urutannya. Banyaknya kombinasi r benda dari n benda dirumuskan sebagai

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \tag{2.2}$$

2.5 Probabilitas Suatu Kejadian

Dalam ilmu statistika, probabilitas suatu kejadian merupakan nilai yang merepresentasikan seberapa besar kemungkinan kejadian tersebut akan terjadi dengan bobot nilai antara nol sampai dengan satu. Pada suatu percobaan yang mempunyai N hasil yang mungkin yang masing-masing memiliki kesempatan yang sama untuk muncul, dan terdapat n hasil yang menyusun kejadian A, nilai probabilitas kejadian A dirumuskan dengan

$$P(A) = \frac{n}{N} \tag{2.3}$$

Kisaran nilai probabilitas suatu kejadian terletak pada interval tertutup $[0,1]$. Kejadian dengan nilai probabilitas nol dinamakan kejadian mustahil dan kejadian dengan nilai probabilitas satu disebut kejadian pasti.

Durret dalam bukunya mendefinisikan ukuran probabilitas atas ruang terukur. Sebelum didefinisikan ukuran probabilitas, terlebih dahulu akan didefinisikan mengenai aljabar-σ dan teori ukuran.

Definisi 2.5.1 [4] *Diberikan himpunan tak kosong Ω yang merupakan himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan. Aljabar-σ (σ-**algebra**) pada Ω adalah koleksi subhimpunan $\mathcal{A}$ dari Ω dengan sifat:*

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$.

(ii) *Jika* $A \in \mathcal{A}$, *maka* $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) *Jika* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *merupakan barisan terhitung dari suatu himpunan, maka* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Dengan Hukum De Morgan, aksioma (iii) berakibat $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_i \epsilon \mathcal{A}$.

Contoh 2.5.2
Diberikan $\Omega = \{1,2,3\}$ dan $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3\}\}$. Karena $\mathcal{A}$ memenuhi aksioma aljabar-σ pada Definisi 2.5.1 , akibatnya $\mathcal{A}$ merupakan aljabar-σ dari Ω.

Definisi 2.5.3 [4] *Misalkan $\mathcal{A}$ aljabar-σ pada himpunan Ω, fungsi $\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}^+$ disebut ukuran jika memenuhi:*
(i) $\mu(A) \geq \mu(\emptyset) = 0$, *untuk semua $A \epsilon \mathcal{A}$ (**tak negatif**).*
(ii) *Jika $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ barisan terhitung dari himpunan yang saling asing, maka $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ (**countably additive**).*

Jika $\mu(\Omega) = 1$, maka μ disebut ukuran probabilitas yang biasanya dinotasikan dengan P.

Teori probabilitas digunakan untuk memodelkan ketidakpastian dalam suatu percobaan. Semua kemungkinan hasil dari percobaan tersebut dinyatakan dalam himpunan tak kosong Ω dan himpunan dari semua kejadian yang mungkin terjadi pada percobaan tersebut dinyatakan dalam $\mathcal{A}$, dimana $\mathcal{A}$ adalah aljabar-σ dari Ω. Pasangan $(\Omega, \mathcal{A})$ disebut ruang terukur. Pada ruang terukur dapat diambil suatu ukuran, dalam hal ini ukuran yang diambil adalah ukuran probabilitas P. Berikut ini diberikan definisi ukuran probabilitas.

Definisi 2.5.4 [5] *Diberikan ruang terukur $(\Omega, \mathcal{A})$ dan fungsi $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ disebut ukuran probabilitas jika memenuhi :*
(i) *Untuk setiap $A \epsilon \mathcal{A}$, $P(A) \geq 0$.*
(ii) $P(\Omega) = 1$.
(iii) *Jika $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ dan saling asing, maka*
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Dari aksioma (iii), didapat akibat yaitu $P(\emptyset) = 0$ dan P merupakan *countably additive*.

Pada ruang terukur $(\Omega, \mathcal{A})$ yang telah dilengkapi dengan P disebut ruang sampel dan dituliskan dengan $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Kemudian secara sederhana ukuran probabilitas didefinisikan oleh Kormogolov sebagai berikut.

Definisi 2.5.5 [6] *Diberikan Ω himpunan dari semua hasil, dan $\mathcal{B}$ koleksi himpunan bagian dari Ω, dimana elemen-elemen dari himpunan $\mathcal{B}$ disebut kejadian acak.*

(i) *$\mathcal{B}$ merupakan alajabar-σ dari Ω.*
(ii) *$\mathcal{B}$ terdiri atas himpunan bagian Ω.*
(iii) *Untuk setiap himpunan A di dalam $\mathcal{B}$ merupakan bilangan riil non-negatif $P(A)$. Bilangan $P(A)$ disebut probabilitas dari kejadian A.*
(iv) *$P(\Omega)$ bernilai 1, dan*
(v) *Jika A dan B di dalam $\mathcal{B}$ dan saling asing, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.*

Contoh 2.5.6 [4]

Pada percobaan pelemparan sekeping uang logam, dapat dituliskan semua kemungkinan hasil dari pecobaan tersebut sebagai $\Omega = \{G, A\}$ dan $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega. \{G\}, \{A\}\}$ merupakan aljabar-σ dari Ω dengan G dan A masing-masing menyatakan “sisi gambar” dan “sisi angka”. Kemudian didefinisikan P pada $(\Omega, \mathcal{A})$ sebagai berikut:

$$P\{G\} = \frac{1}{2} \qquad \text{dan} \qquad P\{A\} = \frac{1}{2}.$$

Dengan demikian jelas bahwa P merupakan ukuran probabilitas.

2.6 Kaidah Penjumlahan Probabilitas

Sering kali, lebih mudah menghitung nilai probabilitas suatu kejadian berdasarkan probabilitas kejadian lain. Hal ini berlaku pada kejadian yang dapat dinyatakan sebagai gabungan dua atau lebih kejadian, atau sebagai komplemen suatu kejadian lainnya. Berikut diberikan beberapa kaidah penjumlahan probabilitas.

Teorema 2.6.1 [1] *Jika A dan B adalah dua kejadian sebarang, maka*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{2.4}$$

Teorema 2.6.2 [1] *Jika A suatu kejadian dan A' komplemennya, maka*

$$P(A) = 1 - P(A') \tag{2.5}$$

BAB III
METODE PENELITIAN

Pada bab ini dijelaskan metode yang digunakan dalam penelitian Tugas Akhir yaitu studi literatur yang dilakukan melalui beberapa tahapan, antara lain :

1. **Mempelajari dan memahami konsep dasar teori probabilitas**
   Pada tahapan ini, dilakukan kajian teori dasar yang digunakan dalam analisis dan pembahasan. Teori dasar yang pertama dipelajari ialah teori dasar probabilitas meliputi ruang sampel, kejadian serta perhitungan probabilitas suatu kejadian. Teori dasar kedua yang dipelajari ialah ukuran probabilitas yang meliputi definisi aljabar-σ, definisi ukuran, ruang terukur dan ukuran probabilitas.
2. **Mengkaji konsep probabilitas bernilai himpunan**
   Pada tahap ini dilakukan kajian teori mengenai definisi probabilitas bernilai himpunan disertai contoh kejadian yang dapat dimodelkan dengan probabilitas bernilai himpunan serta mempelajari aturan penjumlahan pada probabilitas bernilai himpunan.
3. **Mengkaji perluasan ukuran bernilai himpunan**.
   Pada tahap ini dikonstruksi terlebih dahulu pemetaan M yang dibangun dari probabilitas bernilai himpunan, selanjutnya dibuktikan bahwa M suatu ukuran yang kemudian disebut ukuran bernilai himpunan dan bersifat konveks apabila probabilitas bernilai himpunannya juga konveks. Selain itu, dibahas juga mengenai dari probabilitas bernilai himpunan dan ukuran bernilai himpunan.
4. **Mengkaji hubungan probabilitas bernilai himpunan dengan ukuran bernilai himpunan**
   Setelah dibuktikan pemetaan M sebagai suatu ukuran bernilai himpunan, langkah selanjutnya ialah mengadaptasikan sifat probabilitas terhadap M, sehingga $1 \in M(A)$. Ukuran bernilai himpuan yang demikian disebut

probability adaptive set valued measure dan disimbolkan dengan $\boldsymbol{M}$. Serta dibuktikan juga lemma yang merupakan akibat dari *probability adaptive set valued measure*. Langkah terakhir ialah membuktikan bahwa suatu pemetaan $\boldsymbol{P^M}$ yang dibangun dari $\boldsymbol{M}$ merupakan suatu probabilitas bernilai himpunan.

Setelah dilakukan tahap-tahap studi literatur tersebut, dilakukan penarikan kesimpulan berdasarkan kajian-kajian yang telah dilakukan pada tahap-tahap sebelumnya kemudian dilakukan penulisan dan pembukuan Tugas Akhir.

BAB IV
ANALISIS DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dijabarkan mengenai definisi probabilitas bernilai himpunan disertai contoh kejadian yang dapat direpresentasikan dengan probabilitas bernilai himpunan, sifat-sifat dari probabilitas bernilai himpunan, serta hubungan probabilitas dengan ukuran bernilai himpunan dan juga sebaliknya.

4.1 Probabilitas Bernilai Himpunan

Pada bagian ini diuraikan definisi probabilitas bernilai himpunan disertai contoh riil probabilitas bernilai himpunan.

Imprecise probability merupakan bentuk umum yang digunakan untuk mengkover semua model matematika, yang berupa ukuran probabilitas tanpa nilai probabilitas yang tepat. Dengan kata lain, *imprecise* probability dapat digunakan untuk mencari nilai probabilitas suatu kejadian dengan informasi yang kurang lengkap. Salah satu model dari *Imprecise probability* ialah probabilitas bernilai himpunan yang diperkenalkan oleh Mila Stojaković pada tahun 2012. Probabilitas bernilai himpunan merupakan perluasan dari ukuran probabilitas yang didefinisikan atas ruang terukur $(\Omega, \mathcal{A})$. Berikut ini definisi dari probabilitas bernilai himpunan.

Definsisi 4.1.1 [2] *Diberikan $(\Omega, \mathcal{A})$ suatu ruang terukur. Fungsi bernilai himpunan $\boldsymbol{P}: \mathcal{A} \to 2^{[0,1]}$ disebut probabilitas bernilai himpunan jika memenuhi :*

(i) Untuk setiap $A \in \mathcal{A}, \boldsymbol{P}(A) \neq \emptyset$.
(ii) Untuk setiap $A \in \mathcal{A}$ dan setiap $x \in \boldsymbol{P}(A)$, terdapat selektor probabilitas $p: \mathcal{A} \to [0,1]$ dari $\boldsymbol{P}$, sehingga $p(A) = x$.

Jika $\boldsymbol{P}$ probabilitas bernilai himpunan, maka himpunan semua selektor probabilitas dari $\boldsymbol{P}$ dinotasikan dengan S_p, $S_p = \{p | p: \mathcal{A} \to [0,1]\}$.

Dari Definisi 4.1.1 diperoleh bahwa fungsi selektor probabilitas p memiliki domain dan kodomain yang sama dengan ukuran probabilitas sehingga dapat dikatakan bahwa selektor probabilitas p merupakan ukuran probabilitas. Dengan demikian, probabilitas bernilai himpunan dibangun oleh nilai-nilai dari ukuran probabilitas. Berikut ini diberikan contoh kejadian yang dapat di selesaikan dengan probabilitas bernilai himpunan.

Contoh 4.1.2

Pada sebuah industri rumahan XYZ memiliki 2 mesin, mesin A dan mesin B yang memproduksi sebanyak 20 produk setiap harinya dengan data hasil produksi masing-masing mesin tidak diketahui. Kemudian diambil 10 produk sekaligus secara acak dan dicari probabilitas terambilnya 5 produk dari mesin A dan 5 produk dari mesin B. Karena jumlah produksi masing-masing mesin A dan mesin B tidak diketahui, akibatnya probabilitas terambilnya 5 produk dari mesin A dan 5 produk dari mesin B tidak dapat dihitung menggunakan teori probabilitas biasa. Untuk itu, digunakan probabilitas bernilai himpunan. Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Menentukan selektor probabilitas.

Untuk mencari probabilitas kejadian di atas digunakan probabilitas bernilai himpunan. Untuk itu, langkah pertama yang dilakukan ialah menentukan selektor probabilitas terlebih dahulu. Sesuai dengan rumusan probabilitas suatu kejadian pada persamaan (2.3), maka digunakan rumus dasar sebagai berikut

$$p_i(X) = \frac{n}{N} \qquad (4.1)$$

dengan :

$p_i(X)$	:	nilai probabilitas kejadian terambilnya 5 produk dari mesin A dan 5 produk mesin B
n	:	banyaknya cara pengambilan 5 produk dari mesin A dan 5 produk dari mesin B
N	:	banyaknya kemungkinan hasil dari semua percobaan

Untuk mengetahui banyaknya cara pengambilan 5 produk dari mesin A dan 5 produk dari mesin B maka digunakan rumus kombinasi (2.2).

$$n = \binom{n(A)}{5}\binom{n(B)}{5} \tag{4.2}$$

dengan :

n(A) : jumlah produk yang dihasilkan mesin A

n(B) : jumlah produk yang dihasilkan mesin B

serta banyaknya kemungkinan hasil dari semua percobaan adalah

$$N = \binom{20}{10} \tag{4.3}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (4.2) dan persamaan (4.3) ke persamaan (4.1) didapat rumus selektor probabilitas secara umum sebagai berikut

$$p_i(X) = \frac{\binom{n(A)}{5}\binom{n(B)}{5}}{\binom{20}{10}} \tag{4.4}$$

Dari persaman (4.4) nilai selektor probabilitas belum bisa dihitung karena jumlah produk yang dihasilkana mesin A dan mesin B masih belum diketahui. Karena kejadian yang diinginkan terambil 5 produk dari mesin A dan 5 produk dari mesin B, agar nilai selektor probabilitas dapat dihitung, mesin A dan mesin B masing-masing harus menghasilkan sedikitnya 5 produk. Dengan demikian, macam-macam selektor probabilitas pada kejadian di atas dapat ditampilkan pada tabel berikut.

Tabel 4.1 Selektor probabilitas Contoh 4.1.2

$\boldsymbol{p_i}$	**n(A)**	**n(B)**	$\boldsymbol{p_i(X)}$
p_1	5	15	$\frac{\binom{5}{5}\binom{15}{5}}{\binom{20}{10}}$
p_2	6	14	$\frac{\binom{6}{5}\binom{14}{5}}{\binom{20}{10}}$

p_3	7	13	$\frac{\binom{7}{5}\binom{13}{5}}{\binom{20}{10}}$
p_4	8	12	$\frac{\binom{8}{5}\binom{12}{5}}{\binom{20}{10}}$
p_5	9	11	$\frac{\binom{9}{5}\binom{11}{5}}{\binom{20}{10}}$
p_6	10	10	$\frac{\binom{10}{5}\binom{10}{5}}{\binom{20}{10}}$
p_7	11	9	$\frac{\binom{9}{5}\binom{11}{5}}{\binom{20}{10}}$
p_8	12	8	$\frac{\binom{8}{5}\binom{12}{5}}{\binom{20}{10}}$
p_9	13	7	$\frac{\binom{7}{5}\binom{13}{5}}{\binom{20}{10}}$
p_{10}	14	6	$\frac{\binom{6}{5}\binom{14}{5}}{\binom{20}{10}}$
p_{11}	15	5	$\frac{\binom{5}{5}\binom{!5}{5}}{\binom{20}{10}}$

2. Menghitung nilai masing-masing selektor probabilitas.
Setelah diperoleh rumusan selektor probabilitas pada persamaan (4.4) di langkah kedua, sehingga didapat nilai masing-masing selektor probabilitas adalah sebagai berikut

Tabel 4.2 nilai selektor probabilitas Contoh 4.1.2

$\boldsymbol{p_i}$	**n(A)**	**n(B)**	$\boldsymbol{p_i(X)}$
p_1	5	15	$\frac{3003}{184756}$

p_2	6	14	$\frac{12012}{184756}$
p_3	7	13	$\frac{27027}{184756}$
p_4	8	12	$\frac{44352}{184756}$
p_5	9	11	$\frac{58212}{184756}$
p_6	10	10	$\frac{63504}{184756}$
p_7	11	9	$\frac{58212}{184756}$
p_8	12	8	$\frac{44352}{184756}$
p_9	13	7	$\frac{27027}{184756}$
p_{10}	14	6	$\frac{12012}{184756}$
p_{11}	15	5	$\frac{3003}{184756}$

Dari Tabel 4.2 diperoleh nilai probabilitas yang berupa himpunan dari kejadian di atas sebagai berikut

$$\boldsymbol{P}(X) = \left\{\frac{3003}{184756}, \frac{12012}{184756}, \frac{27027}{184756}, \frac{44352}{183756}, \frac{58212}{184756}, \frac{63504}{184756}, \right.$$
$$\left. \frac{58212}{184756}, \frac{44352}{183756}, \frac{27027}{184756}, \frac{12012}{184756}, \frac{3003}{184756} \right\}$$

dan $\boldsymbol{P}(X)$ merupakan probabilitas bernilai himpunan.

Berdasarkan definisi ukuran probabilitas pada Definisi 2.5.4, diketahui bahwa $P(\Omega) = 1$ dan $P(\emptyset) = 0$ dengan Ω

merupakan himpunan semua kemungkinan hasil percobaan. Dengan demikian, diperoleh teoorema berikut.

Teorema 4.1.3 *Diberikan* $(\Omega, \mathcal{A})$ *suatu ruang terukur. Jika* $\boldsymbol{P}$ *merupakan probabilitas bernilai himpunan, maka* $\boldsymbol{P}(\Omega) = \{1\}$ *dan* $\boldsymbol{P}(\emptyset) = \{0\}$.

Bukti :

(i) Ambil sebarang $x \in \boldsymbol{P}(\Omega)$. Diketahui $\boldsymbol{P}$ probabilitas bernilai himpunan, artinya untuk setiap $\Omega \in \mathcal{A}$ terdapat selektor probabilitas $p : \mathcal{A} \to [0,1]$ sehingga $p(\Omega) = x$. Dari Definisi 2.5.4 (ii), diketahui $p(\Omega) = 1$. Karena $p(\Omega) = 1$ berlaku untuk setiap $p \in S_p$, akibatnya $\boldsymbol{P}(\Omega) = \{1\}$.

(ii) Ambil sebarang $y \in P(\emptyset)$. Diketahui $\boldsymbol{P}$ probabilitas bernilai himpunan, artinya untuk setiap $\emptyset \in \mathcal{A}$ terdapat selektor probabilitas $p : \mathcal{A} \to [0,1]$ sehingga $p(\emptyset) = y$. Dari akibat Definisi 2.5.4 (iii), diperoleh $p(\emptyset) = 0$. Karena $p(\emptyset) = 0$ berlaku untuk setiap $p \in S_p$, dengan demikian $\boldsymbol{P}(\emptyset) = \{0\}$.

4.2 Kaidah Penjumlahan Probabilitas Bernilai Himpunan

Pada bagian ini dibuktikan teorema-teorema mengenai kaidah penjumlahan probabilitas bernilai himpunan yang meliputi probabilitas gabungan dua kejadian dan komplemen kejadian.

Nilai probabilitas suatu kejadian dapat dicari berdasarkan nilai probabilitas kejadian yang lain, misalkan dengan penggabungan dua kejadian atau lebih dan juga komplemen suatu kejadian, seperti pada Teorema 2.6.1 dan Teorema 2.6.2. Berikut ini ditunjukkan bahwa kaidah penjumlahan tersebut juga berlaku pada probabilitas bernilai himpunan.

Teorema 4.2.1 *Diberikan* $(\Omega, \mathcal{A})$ *suatu ruang terukur. Jika* $\boldsymbol{P}$ *probabilitas bernilai himpunan, maka*

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) \subseteq \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B).$$

Bukti :

Ambil sebarang $x \in \boldsymbol{P}(A \cup B)$. Diketahui bahwa **P** probabilitas bernilai himpunan, artinya untuk setiap $(A \cup B) \in \mathcal{A}$ terdapat selektor probabilitas p : $\mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ sehingga $p(A \cup B) = x, \forall p \in S_p$. Dengan Teorema 2.6.1, diperoleh

$$x = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Karena **P** probabilitas bernilai himpunan, akibatnya untuk $\boldsymbol{P}(A)$, $\boldsymbol{P}(B)$ dan $\boldsymbol{P}(A \cap B)$ masing-masing dapat dipastikan terdapat selektor probabilitas $p : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ sedemikian hingga $p(A) \in \boldsymbol{P}(A)$, $p(B) \in \boldsymbol{P}(B)$ dan $p(A \cap B) \in \boldsymbol{P}(A \cap B)$**.** Oleh karena itu,

$$x = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \in \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(A \cap B).$$

Berikut ini contoh kejadian dari Teorema 4.2.1.

Contoh 4.2.2

Dengan kondisi yang sama seperti pada Contoh 4.1.2, akan diambil 5 produk secara acak dan dicari probabilitas terambilnya 5 produk dari mesin A dan 5 produk dari mesin B. Karena jumlah produksi masing-masing mesin tidak diketahui, oleh karena itu nilai probabilitas terambilnya 5 produk dari mesin A atau 5 produk dari mesin B dapat dicari dengan menggunakan probabilitas bernilai himpunan. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Menentukan selektor probabilitas

Untuk mencari probabilitas kejadian di atas digunakan probabilitas bernilai himpunan. Untuk itu, langkah pertama yang dilakukan ialah menentukan selektor probabilitas terlebih dahulu. Misalkan X adalah kejadian terambilnya 5 produk dari mesin A dan Y adalah kejadian terambilnya 5 produk dari mesin B. Kejadian terambilnya 5 produk dari mesin A atau 5 produk dari mesin B dapat dituliskan sebagai $(X \cup Y)$. Untuk mencari nilai probabilitas kejadian $(X \cup Y)$ dapat digunakan kaidah penjumlahan probabilitas gabungan dua kejedian (2.6.1), yaitu

$$p_i(X \cup Y) = p_i(X) + p_i(Y) - p_i(X \cap Y)$$

Karena X dan Y saling asing, akibatnya $p(X \cap Y) = 0$ sehingga

$$p_i(X \cup Y) = p_i(X) + p_i(Y) \tag{4.5}$$

Untuk mencari nilai $p(X)$ dan $p(Y)$ digunakan rumus dasar probabilitas yaitu

$$p_i(X) = \frac{n_A}{N} \text{ dan } p_i(Y) = \frac{n_B}{N} \tag{4.6}$$

dengan :

$p_i(X)$: nilai probabilitas kejadian terambilnya 5 produk dari mesin A dan 5 produk mesin B

n_A : banyaknya cara pengambilan 5 produk dari mesin A

n_A : banyaknya cara pengambilan 5 produk dari mesin A

N : banyaknya kemungkinan hasil dari semua percobaan

Dengan menggunakan rumus kombinasi pada persamaan (2.2), didapat banyaknya cara pengambilan 5 produk dari mesin A sebagai berikut

$$n_A = \binom{n(A)}{5} \tag{4.7}$$

dengan :

n(A) : jumlah produk yang dihasilkan mesin A

dan didapat banyaknya cara pengambilan 5 produk dari mesin B sebagai berikut

$$n_B = \binom{n(B)}{5} \tag{4.8}$$

dengan :

n(B) : jumlah produk yang dihasilkan mesin B

serta banyaknya kemungkinan hasil dari semua percobaan adalah

$$N = \binom{20}{5} \tag{4.9}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (4.2) dan persamaan (4.3) ke persamaan (4.1) diperoleh

$$p_i(X) = \frac{\binom{n(A)}{5}}{\binom{20}{5}} \text{ dan } p_i(Y) = \frac{\binom{n(B)}{5}}{\binom{20}{5}} \tag{4.10}$$

Rumus umum selektor probabilitas kejadian diatas ialah

$$p_i(X \cup Y) = \frac{\binom{n(A)}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{n(B)}{5}}{\binom{20}{5}} \tag{4.11}$$

Dari persaman (4.11) nilai selektor probabilitas belum bisa dihitung karena jumlah produk yang dihasilkana mesin A dan mesin B masih belum diketahui. Dengan demikian, macam-

macam selektor probabilitas pada kejadian di atas dapat ditampilkan pada tabel berikut.

Tabel 4.3 Selektor probabilitas Contoh 4.2.1

$\boldsymbol{p_i}$	**n(A) *)**	**n(B) *)**	$p_i(X \cup Y)$
p_1	1	19	$\frac{\binom{1}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{19}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_2	2	18	$\frac{\binom{2}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_3	3	17	$\frac{\binom{3}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_4	4	16	$\frac{\binom{4}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_5	5	15	$\frac{\binom{5}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{15}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_6	6	14	$\frac{\binom{6}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{14}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_7	7	13	$\frac{\binom{7}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{13}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_8	8	12	$\frac{\binom{8}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{12}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_9	9	11	$\frac{\binom{9}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{11}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_{10}	10	10	$\frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{10}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_{11}	11	9	$\frac{\binom{11}{5}}{\binom{20}{5}} + \frac{\binom{9}{5}}{\binom{20}{5}}$

p_{12}	12	8	$\frac{\binom{12}{5}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{8}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_{13}	13	7	$\frac{\binom{13}{5}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{7}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_{14}	14	6	$\frac{\binom{14}{5}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{6}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_{15}	15	5	$\frac{\binom{15}{5}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{5}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_{16}	16	4	$\frac{\binom{16}{5}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{4}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_{17}	17	3	$\frac{\binom{17}{5}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{3}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_{18}	18	2	$\frac{\binom{18}{5}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{2}{5}}{\binom{20}{5}}$
p_{19}	19	1	$\frac{\binom{19}{5}}{\binom{20}{5}}+\frac{\binom{1}{5}}{\binom{20}{5}}$

2. Menghitung nilai masing-masing selektor probabilitas

Untuk mendapatkan nilai probabilitas kejadian $(X \cup Y)$, terlebih dahulu dicari nilai masing-masing selektor probabilitas $p_i(X \cup Y)$ sebagai berikut

Tabel 4.4 Nilai selektor probabilitas Contoh 4.2.2

$\boldsymbol{p_i}$	**n(A) *)**	**n(B) *)**	$p_i(X)$	$p_i(Y)$	$p_i(X \cup Y)$
p_1	1	19	0	$\frac{11828}{15504}$	$\frac{11828}{15504}$
p_2	2	18	0	$\frac{8586}{15504}$	$\frac{8586}{15504}$

p_3	3	17	0	$\frac{6188}{15504}$	$\frac{6188}{15504}$
p_4	4	16	0	$\frac{4368}{15504}$	$\frac{4368}{15504}$
p_5	5	15	$\frac{1}{15504}$	$\frac{3003}{15504}$	$\frac{3004}{15504}$
p_6	6	14	$\frac{6}{15504}$	$\frac{2002}{15504}$	$\frac{2008}{15504}$
p_7	7	13	$\frac{21}{15504}$	$\frac{1287}{15504}$	$\frac{1308}{15504}$
p_8	8	12	$\frac{56}{15504}$	$\frac{792}{15504}$	$\frac{848}{15504}$
p_9	9	11	$\frac{126}{15504}$	$\frac{462}{15504}$	$\frac{588}{15504}$
p_{10}	10	10	$\frac{252}{15504}$	$\frac{252}{15504}$	$\frac{504}{15504}$
p_{11}	11	9	$\frac{462}{15504}$	$\frac{126}{15504}$	$\frac{588}{15504}$
p_{12}	12	8	$\frac{792}{15504}$	$\frac{56}{15504}$	$\frac{848}{15504}$
p_{13}	13	7	$\frac{1287}{15504}$	$\frac{21}{15504}$	$\frac{1308}{15504}$
p_{14}	14	6	$\frac{2002}{15504}$	$\frac{6}{15504}$	$\frac{2008}{15504}$
p_{15}	15	5	$\frac{3003}{15504}$	$\frac{1}{15504}$	$\frac{3004}{15504}$
p_{16}	16	4	$\frac{4368}{15504}$	0	$\frac{4368}{15504}$
p_{17}	17	3	$\frac{6188}{15504}$	0	$\frac{6188}{15504}$
p_{18}	18	2	$\frac{8586}{15504}$	0	$\frac{8586}{15504}$

p_{19}	19	1	$\frac{11828}{15504}$	0	$\frac{11828}{15504}$

Dari Tabel 4.4 diperoleh

$$\boldsymbol{P}(X \cup Y) = \left\{\frac{11828}{15504}, \frac{8586}{15504}, \frac{6188}{15504}, \frac{4368}{15504}, \frac{3004}{15504}, \frac{2008}{15504}, \frac{1308}{15504}, \frac{848}{15504}, \frac{588}{15504}, \frac{504}{15504}, \frac{588}{15504}, \frac{848}{15504}, \frac{1308}{15504}, \frac{2008}{15504}, \frac{3004}{15504}, \frac{4368}{15504}, \frac{6188}{15504}, \frac{8586}{15504}, \frac{11828}{15504}\right\}$$

$$\boldsymbol{P}(X) = \left\{0,0,0,0, \frac{1}{15504}, \frac{6}{15504}, \frac{21}{15504}, \frac{56}{15504}, \frac{126}{15504}, \frac{252}{15504}, \frac{462}{15504}, \frac{792}{15504}, \frac{1287}{15504}, \frac{2002}{15504}, \frac{3003}{15504}, \frac{4368}{15504}, \frac{6188}{15504}, \frac{8586}{15504}, \frac{11828}{15504}\right\}$$

$$\boldsymbol{P}(Y) = \left\{\frac{11828}{15504}, \frac{8586}{15504}, \frac{6188}{15504}, \frac{4368}{15504}, \frac{3003}{15504}, \frac{2002}{15504}, \frac{1287}{15504}, \frac{792}{15504}, \frac{462}{15504}, \frac{252}{15504}, \frac{126}{15504}, \frac{56}{15504}, \frac{21}{15504}, \frac{6}{15504}, \frac{1}{15504}, 0,0,0,0\right\}$$

dan

$$\boldsymbol{P}(X + Y) = \left\{\frac{11828}{15504}, \frac{8586}{15504}, \frac{6188}{15504}, \frac{4368}{15504}, \frac{3004}{15504}, \frac{2008}{15504}, \frac{1308}{15504}, \frac{848}{15504}, \frac{588}{15504}, \frac{504}{15504}, \frac{588}{15504}, \frac{848}{15504}, \frac{1308}{15504}, \frac{2008}{15504}, \frac{3004}{15504}, \frac{4368}{15504}, \frac{6188}{15504}, \frac{8586}{15504}, \frac{11828}{15504}\right\}$$

Dengan catatan, penjumlahan didasarkan atas selektor probabilitas yang sama.

Sesuai dengan Teorema 4.2.1, setiap elemen pada $\boldsymbol{P}(X \cup Y)$ merupakan elemen dari $\boldsymbol{P}(X) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y})$. Dan pada contoh ini berlaku $\boldsymbol{P}(X \cup Y) = \boldsymbol{P}(X) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{Y})$.

Teorema 4.2.3 *Diberikan* $(\Omega, \mathcal{A})$ *suatu ruang terukur. Jika* ***P*** *probabilitas bernilai himpunan, maka*

$$1 \in \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(A').$$

Bukti :

Dari Teorema 4.1.3, diperoleh bahwa $\boldsymbol{P}(\Omega) = \{1\}$. Diketahui $\boldsymbol{P}$ probabilitas bernilai himpunan, akibatnya terdapat selektor probabilitas $p : \mathcal{A} \to [0,1]$ sehingga $p(\Omega) = 1$. Karena diketahui Ω merupakan semesta kejadian dengan $\Omega = A \cup A'; \forall A \in \mathcal{A}$ dan A dan A' saling asing. Akibatnya

$$1 = p(\Omega) = p(A \cup A') = p(A) + p(A')$$

Karena $\boldsymbol{P}$ probabilitas bernilai himpunan, untuk itu $\boldsymbol{P}(A)$ dan $\boldsymbol{P}(A')$ masing-masing terdapat selektor probabilitas $p : \mathcal{A} \to [0,1]$ sedemikian hingga $p(A) \in \boldsymbol{P}(A)$ dan $p(A') \in \boldsymbol{P}(A')$**,** sehingga diperoleh

$$1 = p(A) + p(A') \in \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(A').$$

Berikut ini diberikan contoh kejadian dari Teorema 4.2.3.

Contoh 4.2.4

Dengan kondisi yang sama seperti pada Contoh 4.1.2, akan diambil 10 produk secara acak. Karena jumlah produksi masing-masing mesin tidak diketahui, oleh karena itu nilai probabilitas terambilya selain 5 produk dari mesin A atau mesin B dapat dicari dengan menggunakan probabilitas bernilai himpunan. Kejadian tersebuti merupakan komplemen dari kejadian pada Contoh 4.1.2. Dengan demikian, nilai probabilitasnya dapat dicari dengan menggunakan kaidah penjumlahan pada Teorema 2.6.2. Dan juga selektor probabilitas pada kejadian ini sama dengan Contoh 4.1.2. Sehingga, hanya perlu dilakukan langkah menghitung nilai masing-masing probabilitas sebagai berikut

Tabel 4.5 Nilai selektor probabilitas Contoh 4.2.4

$\boldsymbol{p_i}$	**n(A) *)**	**n(B) *)**	$\boldsymbol{p_i(X)}$	$\boldsymbol{p_i(X')}$	$\boldsymbol{p_i(X) + p_i(X')}$
p_1	5	15	$\frac{3003}{184756}$	$\frac{181753}{184756}$	1

p_2	6	14	$\frac{12012}{184756}$	$\frac{172744}{184756}$	1
p_3	7	13	$\frac{27027}{184756}$	$\frac{157729}{184756}$	1
p_4	8	12	$\frac{44352}{184756}$	$\frac{140404}{184756}$	1
p_5	9	11	$\frac{58212}{184756}$	$\frac{126544}{184756}$	1
p_6	10	10	$\frac{63504}{184756}$	$\frac{121252}{184756}$	1
p_7	11	9	$\frac{58212}{184756}$	$\frac{126544}{184756}$	1
p_8	12	8	$\frac{44352}{184756}$	$\frac{140404}{184756}$	1
p_9	13	7	$\frac{27027}{184756}$	$\frac{157729}{184756}$	1
p_{10}	14	6	$\frac{12012}{184756}$	$\frac{172744}{184756}$	1
p_{11}	15	5	$\frac{3003}{184756}$	$\frac{181753}{184756}$	1

*) n(A) : jumlah produk yang dihasilkan mesin A
n(B) : jumlah produk yang dihasilkan mesin B

Dari Tabel 4.5 diperoleh bahwa setiap selektor probabilitas berlaku $p_i(X) + p_i(X') = 1$, dengan demikiaan jelas bahwa $1 \in \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(A')$.

4.3 Ukuran Bernilai Himpunan

Pada bagian ini dijelaskan bahwa probabilitas bernilai himpunan merupakan ukuran bernilai himpunan dengan cara pengkonstruksian suatu ukuran serta dibuktikan pula mengenai konveksitas pada ukuran bernilai himpunan.

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa probabilitas bernilai himpunan didefinisikan atas ruang terukur $(\Omega, \mathcal{A})$. Selanjutnya dikonstruksi suatu pemetaan M pada $(\Omega, \mathcal{A})$ yang dibangun oleh probabilitas bernilai himpunan. Kemudian dibuktikan bahwa M suatu ukuran yang disebut ukuran bernilai himpunan.

Teorema 4.3.1 Diberikan $\boldsymbol{P} : \mathcal{A} \to 2^{[0,1]}$ probabilitas bernilai himpunan. Jika $M\colon \mathcal{A} \to 2^{\mathbb{R}^+}$ suatu pemetaan yang didefinisikan dengan

$$M(A) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} p_i(A_i)\,, \{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A}; \text{partisi dari } A, \{p_i\}_{i=1}^{n} \subset S_p, \; n \in \mathbb{N} \right\},$$

maka M *adalah suatu ukuran.*

Bukti :

Akan ditunjukkan M memenuhi Definisi 2.5.3, sehingga

(i) Ambil sebarang $A \in \mathcal{A}$, sehingga $M(A) = \{\sum_{i=1}^{n} p_i(A_i)\}$; $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A}$, partisi terukur dari A, $\{p_i\}_{i=1}^{n} \subset S_p$, $n \in \mathbb{N}$. Berdasarkan Definisi 2.5.4, untuk setiap selektor probabilitas $p : \mathcal{A} \to [0,1]$ berlaku $p(A) \geq 0$. Akibatnya

$$M(A) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} p_i(A_i) \geq 0 \right\}.$$

Dengan kata lain, M tak negatif.

(ii) Ambil $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ partisi berhingga dari Ω, sehingga

$$M\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) = M(\Omega)$$

$$= \left\{ \sum_{i=0}^{n} p_i(\Omega_i)\,, \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i\,, \{p_i\}_{i=1}^{n} \subseteq S_p, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i(A_k \cap \Omega_i), \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i\,, \{p_i\}_{i=1}^{n} \subseteq S_p, n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i(A_{ki})\,, \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i\,, \{p_i\}_{i=1}^{n} \subseteq S_p, n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(A_{ki})\, \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i\,, \{p_i\}_{i=1}^{n} \subseteq S_p, n \in \mathbb{N} \right\}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} M(A_k)$$

Dari (i) dan (ii) diketahui bahwa M memenuhi Definisi 2.5.3 yaitu tak negatif dan *countably additive*. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa M merupakan ukuran.

Dari Teorema 4.3.1 diperoleh bahwa M dalah suatu ukuran. Karena M dibangun oleh probabilitas bernilai himpunan, M disebut ukuran bernilai himpunan. Selanjutnya dibuktikan menggenai konveksitas pada ukuran bernilai himpunan sebagai berikut.

Teorema 4.3.2 *Diberikan* $\boldsymbol{P}$ *probabilitas bernilai himpunan dan* M *ukuran bernilai himpunan. Jika* $\boldsymbol{P}(A)$ *konveks untuk setiap* $A \in \mathcal{A}$*, maka* $M(A)$ *juga konveks.*

Bukti :

Ambil $x, y \in M(A)$. Untuk membuktikan bahwa $M(A)$ konveks, x dan y harus memenuhi $\lambda x + (1-\lambda)y \in M(A), \forall \lambda \in [0,1]$. Dari definisi M pada Teorema 4.3.1, untuk $x \in M(A)$ berarti terdapat partisi behingga $\{A_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A}$ dari A sehingga $x = \sum_{i=1}^{n} p_i(A_I)$, $\{p_i\}_{i=1}^{n} \subset S_p$, $n \in \mathbb{N}$, demikian pula untuk $y \in M(A)$ berarti terdapat partisi behingga $\{A_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathcal{A}$ dari A sehingga $\mathrm{y} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{p_j}(\mathrm{A_j})$, $\{\mathrm{p_i}\}_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} \subset \mathrm{S_p}$, $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$. Selanjutya pemetaan $\lambda p_i + (1-\lambda)p_j : \mathcal{A} \to [0,1]$ dengan $(\lambda p_i + (1-\lambda)p_j)(A) = \lambda p_i(A) + (1-\lambda)p_j(A)$ merupakan ukuran probabilitas.

Diketahui bahwa $\boldsymbol{P}(A)$ konveks, akibatnya untuk $p_i, p_j \in S_p$ berakibat $\lambda p_i + (1-\lambda)p_j \in S_p$, $\forall \lambda \in [0,1]$. Sehingga untuk $\{A_i \cap A_j\}_{i=1,j=1}^{i=n,j=m} \subset S_p$ partisi berhingga dari A berlaku

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda p_i + (1-\lambda)p_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(A_i \cap A_j\right)\right) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\lambda p_i + (1-\lambda)p_j\right)\left(A_i \cap A_j\right) \\
&\quad = \lambda \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_i\left(A_i \cap A_j\right) + (1-\lambda)\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_j\left(A_i \cap A_j\right) \\
&\quad = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i\left(\bigcup_{j=1}^{m}\left(A_i \cap A_j\right)\right) + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{m} p_j\left(\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i \cap A_j\right)\right) \\
&\quad = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i\left(A_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m}(A_m)\right)\right) \\
&\qquad\qquad + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{m} p_j\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i)\right) \cap A_j\right) \\
&\quad = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i(A_i) + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{m} p_j\left(A_j\right) \\
&\quad = \lambda x + (1-\lambda)y \in M(A)
\end{aligned}$$

Karena $x, y \in M(A)$ memenuhi $\lambda x + (1-\lambda)y \in M(A), \forall \lambda \in [0,1]$, akibatnya benar bahwa M konveks.

4.4 Atom dari Probabilitas Bernilai Himpunan

Pada bagian ini dijelaskan mengenai atomisitas pada probabilitas bernilai himpunan dan ukuran bernilai himpunan disertai beberapa sifat-sifatnya.

Berikut ini didefisikan atom dari probabilitas bernilai himpunan.

Definisi 4.4.1 *Diberikan ruang sampel* $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ *dengan* $\boldsymbol{P}$ *probabilitas bernilai himpunan.* $A \in \mathcal{A}$ *merupakan atom dari* $\boldsymbol{P}$ *dengan* $\boldsymbol{P}(A) \neq \{0\}$*, jika dan hanya jika* $\forall B \subset A$*,* $\boldsymbol{P}(B) = \{0\}$ *atau* $\boldsymbol{P}(A/B) = \{0\}$.

Untuk $A \in \mathcal{A}$ atom dari $\boldsymbol{P}$**,** S_A adalah himpunan dari selektor probabilitas atom, $p \in S_A$, sehingga dapat dipastikan S_A himpunan bagian S_p. Dengan demikian, $A \in \mathcal{A}$ atom dari $\boldsymbol{P}$ merupakan kejadian yang nilai probabilitas kejadian bagiannya adalah nol. Berikut ini dibuktikan sifat-sifat dari atom.

Teorema 4.4.2 *Diberikan ruang sampel* $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ *dengan* $\boldsymbol{P}$ *probabilitas bernilai himpunan. Jika* $A \in \mathcal{A}$ *adalah atom dari* $\boldsymbol{P}$*, maka* $S_A \neq \emptyset$.

Bukti :

Andaikan $S_A = \emptyset$. Artinya A bukan atom untuk $p \in S_p$. Akibatnya A tidak bisa menjadi atom untuk $\boldsymbol{P}$. Kontradiksi dengan pernyataan bahwa A atom dari $\boldsymbol{P}$.

Teorema 4.4.3 *Diberikan ruang sampel* $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ *dengan* $\boldsymbol{P}$ *probabilitas bernilai himpunan. Jika* $A \in \mathcal{A}$ *atom dari* $\boldsymbol{P}$*, maka* $q(A) = 0;\ \forall q \in S_p \backslash S_A$.

Bukti :

Andaikan $q_A > 0, q \in S_p \backslash S_A$. Artinya untuk $B \subset A, A \in \mathcal{A}$ berlaku $q(B) > 0$ dan $q(A \backslash B) > 0$. Dengan kata lain, $\boldsymbol{P}(B) \neq \{0\}$ dan $\boldsymbol{P}(A \backslash B) \neq \{0\}$. Kontradiksi bahwa A atom dari $\boldsymbol{P}$.

Teorema 4.4.4 *Diberikan ruang sampel* $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ *dengan* $\boldsymbol{P}$ *probabilitas bernilai himpunan. Jika* $A \in \mathcal{A}$ *atom dari* $\boldsymbol{P}$*, maka A atom dari* M.

Bukti :

Ambil sebarang $B \subset A$, sehingga

$$M(B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(B_i) \right\}$$

dan

$$M(A \backslash B) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(A_i \backslash B_i) \right\}$$

Karena $\boldsymbol{P}$ probabilitas bernilai himpunan, akibatnya terdapat $p \in S_p \backslash S_A$ sehingga $p(B) = 0$ dan $p(A \backslash B) = 0$. Dengan demikian, didapat $M(B) = \{0\}$ dan $M(A \backslash B) = \{0\}$. Dengan kata lain A juga atom dari M.

Teorema 4.4.5 *Diberikan ruang sampel* $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ *dengan* $\boldsymbol{P}$ *probabilitas bernilai himpunan.* $\boldsymbol{P}$ nonatomik jika dan hanya jika M nonatomik.

Bukti :

$(\Rightarrow)$

Diberika $\boldsymbol{P}$ nonatomik. Artinya terdapat $B \subset \mathcal{A}$, $\boldsymbol{P}(B) \neq \{0\}$ dan $\boldsymbol{P}(A \backslash B) \neq \{0\}$**.** Dengan kata lain, terdapat $p \in S_A$ sehingga $p(B) > 0$ dan $p(A \backslash B) > 0$**.** Akibatnya

$$\begin{aligned} M(B) &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(B_i) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(B_i) > 0 \right\} \neq \{0\} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} M(A \backslash B) &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(A_i \backslash B_i) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(A_i \backslash B_i) > 0 \right\} \neq \{0\} \end{aligned}$$

Karena $M(B) \neq \{0\}$ dan $M(A \backslash B) \neq \{0\}$, akibatnya M nonatomik.

$(\Leftarrow)$

Diberika M nonatomik. Artinya untuk sebarang $B \subset \mathcal{A}$, $M(B) \neq \{0\}$ dan $M(A\backslash B) \neq \{0\}$. Dengan kata lain, terdapat $\{B_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{A}$ partisi dari B dan $\{p_i\}_{i=1}^{n} \subset S_A$, $n \in \mathbb{N}$, sehingga

$$M(B) = \left\{\sum_{i=1}^{n} p_i(B_i)\right\} \neq \{0\}$$

dan

$$M(A\backslash B) = \left\{\sum_{i=1}^{n} p_i(A_i\backslash B_i)\right\} \neq \{0\}$$

Artinya $\sum_{i=1}^{n} p_i(B_i) > 0$ dan $\sum_{i=1}^{n} p_i(A_i\backslash B_i) > 0$. Dengan kata lain, terdapat sedikitnya satu $p_i(B_i) > 0, i \in \mathbb{N}$ dan $p_i(A_i\backslash B_i) > 0, i \in \mathbb{N}$. Akibatnya $\boldsymbol{P}(B) \neq \{0\}$ dan $\boldsymbol{P}(A\backslash B) \neq \{0\}$. Dengan kata lain, $\boldsymbol{P}$ nonatomik.

4.5 Hubungan Ukuran Bernilai Himpunan dengan Probabilitas Bernilai Himpunan

Pada bagian ini dibahas mengenai hubungan antara ukuran bernilai himpunan dengan probabilitas bernilai himpunan yang melalui pengonstruksian probabilitas bernilai himpunan dari ukuran bernilai himpunan.

Untuk menunjukkan hubungan antara ukuran bernilai himpunan dengan probabilitas bernilai himpunan, terlebih dahulu dikonstruksi pemetaan bernilai himpunan $\boldsymbol{P^M}: \mathcal{A} \rightarrow 2^{[0,1]}$ yang dibangun oleh *probability adaptive set valued measure* $\boldsymbol{M}$ yang diadaptasikan dengan probabilitas bernilai himpunan, kemudian dibuktikan bahwa $\boldsymbol{P^M}$ merupakan ukuran bernilai himpunan. Sebelum itu, telebih dahulu dibahas mengenai *probability adaptive set valued measure.*

Pada bagian sebelumnya telah dibahas mengenai ukuran bernilai himpunan. Selanjutnya, ukuran bernilai himpunan tesebut diadaptasikan terhadap ukuran probabilitas sehingga pemetaannya menjadi $\boldsymbol{M}: \mathcal{A} \rightarrow 2^{[0,1]}$ dan $1 \in \boldsymbol{M}(\Omega)$. Bentuk ukuran bernilai himpunan yang demikian disebut *probability adaptive set valued measure* atau ukuran bernilai himpunan berhingga yang telah diadaptasikan dengan ukuran probabilitas dan diperoleh lemma berikut.

Lemma 4.5.1 *Jika* $\boldsymbol{M}$ *suatu "probability adaptive set valued measure", maka*

(i) Terdapat $r \in \mathbb{R}^+$ *sehingga* $sup_{x \in \boldsymbol{M}(\Omega)} < r$

(ii) Untuk setiap $A \in \mathcal{A}$,

$$\{(x, x') \in [0,1]^2 : x + x' = 1, x \in \boldsymbol{M}(A), x' \in \boldsymbol{M}(A')\} \neq \emptyset$$

Bukti :

(i) Diketahui $\boldsymbol{M}$ suatu ukuran bernilai himpunan, untuk setiap $A \in \mathcal{A}$ dan setiap $x \in \boldsymbol{M}(\text{A})$ terdapat selektor ukuran m sehingga $m(A) = x$. Jadi, suatu *probability adaptive set valued measure* memenuhi sedikitnya satu selektor ukuran m sehingga $m(\Omega) = 1$. Dengan demikian, m merupakan selektor probabilitas dan $sup_{x \in \boldsymbol{M}(\Omega)} = 1$. Sehingga didapat nilai r yaitu $r > 1$.

(ii) Dari (i) diperoleh bahwa m merupakan selektor probabilitas, dengan demikian, dapat dipastikan bahwa untuk setiap $A \in \mathcal{A}$ berlaku

$$\{(x, x') \in [0,1]^2 : x + x' = 1, x \in \boldsymbol{M}(A), x' \in \boldsymbol{M}(A')\} \neq \emptyset$$

Selanjutnya, dengan pengonstruksian suatu pemetaan bernilai himpunan $\boldsymbol{P^M} : \mathcal{A} \to 2^{[0,1]}$ yang dibangun oleh *probability adaptive set valued measure* $\boldsymbol{M}$ ditunjukkan bahwa $\boldsymbol{P^M}$ merupakan probabilitas bernilai himpunan seperti pada teorema berikut ini.

Teorema 4.5.2 *Diberikan* $\boldsymbol{M}$ *"probability adaptive set valued measure". Jika suatu fungsi bernilai himpunan* $\boldsymbol{P^M} : \mathcal{A} \to 2^{[0,1]}$ *yang didefinisikan dengan*

$$\boldsymbol{P^M}(A) = \{x \in [0,1] : x \in \boldsymbol{M}(A), \exists x' \in \boldsymbol{M}(A'), x + x' = 1\}, A \in \mathcal{A},$$

Maka $\boldsymbol{P^M}$ *suatu probabilitas bernilai himpunan.*

Bukti :

$\boldsymbol{P^M}$ dikatakan probabilitas bernilai himpunan jika memenuhi :

(i) Untuk setiap $A \in \mathcal{A}, \boldsymbol{P^M}(A) \neq \emptyset$.

(ii) Untuk setiap $A \in \mathcal{A}$ dan setiap $x \in \boldsymbol{P^M}(A)$, terdapat selektor probabilitas $p: \mathcal{A} \to [0,1]$ dari $\boldsymbol{P^M}$, sehingga $p(A) = x$.

Dengan demikian,

(i) Andaikan terdapat $A \in \mathcal{A}, \boldsymbol{P^M}(A) = \emptyset$. Berdasarkan Lemma 4.5.1 (ii), kondisi ini kontradiksi dengan $\boldsymbol{P^M}$ suatu probabilitas bernilai himpunan.

(ii) Berdasarkan Lemma 4.5.1 (i), terdapat selektor probabilitas, katakana p sehingga untuk sebarang $A \in \mathcal{A}$, dan $x \in \boldsymbol{P^M}(A)$ berlaku $p(A) = x$.

$\boldsymbol{P^M}$ terbukti memenuhi definisi probabilitas bernilai himpunan.

BAB V
PENUTUP

Pada ini berisi tentang kesimpulan yang dihasilkan berdasarkan kajian yang telah diakukan serta saran yang untuk penelitian selanjutnya.

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan kajian yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Pemetaan $\boldsymbol{P}: \mathcal{A} \to 2^{[0,1]}$ disebut probabilitas bernilai himpunan jika untuk setiap $A \in \mathcal{A}$, $\boldsymbol{P}(A)$ tak kosong dan setiap $x \in \boldsymbol{P}(A)$ terdapat selektor probabilitas $p: \mathcal{A} \to [0,1]$ sehingga $p(A) = x$. Kejadian $A \in \mathcal{A}$ disebut atom dari probabilitas bernilai himpunan dengan $\boldsymbol{P}(A) \neq \{0\}$ jika dan hanya jika untuk setiap $B \subset A$ berlaku $\boldsymbol{P}(B) = \{0\}$ atau $\boldsymbol{P}(A/B) = \{0\}$.
2. Suatu pemetaan $M: \mathcal{A} \to 2^{\mathbb{R}^+}$ yang dibangun oleh elemen-elemen dari probabilitas bernilai himpunan $\boldsymbol{P}$ disebut dengan ukuran bernilai himpunan. Jika $\boldsymbol{M}: \mathcal{A} \to 2^{[0,1]}$ adalah pemetaan ukuran bernilai himpunan yang telah diadaptasikan terhadap ukuran probabilitas sehingga $1 \in \boldsymbol{M}(\Omega)$, yang disebut dengan *probability adaptive set valued measure*, maka dapat dikonstruksi suatu pemetaan $\boldsymbol{P}^{\boldsymbol{M}}: \mathcal{A} \to 2^{[0,1]}$ yang dibangun oleh $\boldsymbol{M}$ yang merupakan probabilitas bernilai himpunan. Dengan demikian, terdapat keterkaitan antara probabilitas bernilai himpunan dengan ukuran bernilai himpunan.

5.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya dapat diselidiki mengenai bentuk lain dari probabilitas yang dapat digunakan untuk memodelkan kejadian dengan informasi yang tidak lengkap seperti probabilitas bernilai fuzzy atau yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Walpole, Ronald E.1995. Pengantar Statistika, edisi ke-3. Jakarta: Gramedia.
[2] Stojaković, M. 2012. Set Valued Probability and Its Connection with Set Valued Measure. Statistic and Probabilty Letters 82(2011) 10431048.
[3] Durrret, R. 2010. Probability: Theory and Example, 4th edition. Cambridge University Press.
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Imprecise_probability. Diakses pada tanggal 17 Februari 2016.
[5] Rohatgi, V. K. 1975. An Introduction to Probability Theory and Mathematiics Statistics. New York: A Wiley-Intersection Publication.
[6] Kolmogorov, A. N. 1950. Foundations of the Theory of Probability. New York: Chelsea Publishing Company

BIODATA PENULIS

Penulis memiliki nama legkap Aslikhatul Baroroh dan biasa dipanggil Asli, lahir di Jember, 30 Juni 1994. Penulis terlahir sebagai anak semata wayang dari Bapak Syaifuddin Zuhri dan Ibu Siti Mutmainah.

Pendidikan formal yang telah di tempuh penulis antara lain TK Al – Hidayah 68 Ambulu (1998-2000), SD Negeri Pontang 01 (2000-2006), SMP Negeri 1 Ambulu (2006-2009), dan SMA Negeri Ambulu (2009-2012). Setelah menyelesaikan pendidikan SMA, penulis melanjutkan pendidikan S1 di Jurusan Matematika Insititut Teknologi Sepuluh Nopember pada tahun 2012. Pada masa perkuliahan penulis mengambil bidang minat Analisis dan Aljabar dan Matematika Terapan pada semester 5 sampai semester 7, kemudian pada semester 8 penulis mengambil bidang minat Analisis dan Aljabar.

Selama kuliah penulis aktif di beberapa organisasi kemahasiswaan, antara lain UKM Penalaran ITS, HIMATIKA ITS dan LDJ Ibnu Muqlah. Pada tahun 2012-2013 penulis menjadi anggota aktif UKM Penalaran ITS. Pada tahun 2013-2014 penulis mejadi staff Depatemen Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa (PSDM) dan staff Departemen Keputrian Ibnu Muqlah. Pada tahun 2014-2015 penulis menjadi Kepala Divisi Pelatihan departemen PSDM HIMATIKA ITS. Serta sejak tahun 2013 sampai 2016 penulis juga aktif dalam dunia kepemanduan ITS. Selain aktif dalam organisasi, penulis aktif mengikuti kepanitiaan berbagai acara seperti OMITS, Gebyar Ibnu Muqlah, Tim Pemandu LKMM FMIPA dan HIMATIKA ITS, dll.

Demikian biodata tentang penulis. Apabila ingin memberikan saran, kritik ataupun diskusi mengenai Tugas Akhir ini dapat dikirimkan melalui alamat email penulis aslikhatul94@gmail.com.